Unabhängigkeit

- Die gemeinsame Verteilung von (X, Y) ist Uniform auf einer Kreisscheibe mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius 1. Sind X und Y unabhängig?
- 1) ja 2) nein 3) keine Ahnung

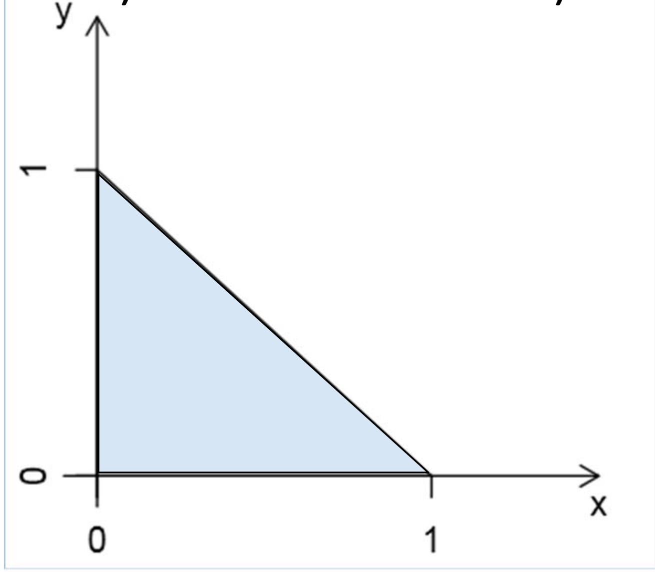
Unabhängigkeit

- Schon vom Wertebereich kann man sehen, dass X und Y abhängig sind: Wenn Y nah bei ± 1 ist, dann ist X nah bei 0, und umgekehrt auch.
- Mit formeln: wir betrachten z.B. den punkt $(x, y) = (0.9{,}0.9)$
  - $f_Y(0.9) > 0$
  - $f_X(0.9) > 0$
  - $f_{X,Y}(0.9{,}0.9) = 0$ (da $0.9^2 + 0.9^2 = 1.62 > 1$)
  - Also: $f_{X,Y}(0.9{,}0.9) \neq f_Y(0.9) f_X(0.9)$

Bedingter Erwartungswert

- Es seien X und Y Zufallsvariablen mit konstanter gemeinsamer Dichte auf dem untenstehenden Dreieck (ausserhalb sei die Dichte 0).
- Der bedingte Erwartungswert von Y gegeben $X = 0.5$ ist:

1) 0.25 2) 0.5 3) etwas anderes 4) keine Ahnung



Bedingter Erwartungswert

- Die bedingte Verteilung von $Y|X = 0.5$ ist $Unif(0, 0.5)$, und diese Verteilung hat Erwartungswert 0.25.
- Formeller:
  - Die gemeinsame Dichte ist $f(x, y) = 2$ auf dem gegeben Dreieck (damit die Dichte auf 1 integriert).
  - Die marginale Dichte $f_X(x = 0.5) = \int_0^{0.5} 2dy = 1$
  - Die bedingte Dichte $f(y|x = 0.5) = \frac{f(x,y)}{f_X(x=0.5)} = \frac{2}{1} = 2$ (für $0 \leq y \leq 0.5$)
  - Der gefragte bedingte Erwartungswert ist also:

$$E(Y|X = 0.5) = \int_0^{0.5} yf(y\,|\mathrm{x} = 0.5)\mathrm{dy} = \int_0^{0.5} 2ydy = 0.5^2 = 0.25$$